22147228

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – ANÁLISIS

Jueves 15 de mayo de 2014 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuaderno de fórmulas* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NS*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 16]*

Considere las funciones f y g dadas por $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ y $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

(a) Muestre que $f'(x)=g(x)$ y $g'(x)=f(x)$. *[2]*

(b) Halle los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x)$. *[5]*

(c) A partir de lo anterior, halle el valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-f(x)}{x^2}$. *[3]*

(d) Halle el valor de la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{g(x)}{\left[f(x)\right]^2}\,dx$. *[6]*

2. *[Puntuación máxima: 17]*

(a) Considere las funciones $f(x)=(\ln x)^2$, $x>1$ y $g(x)=\ln\left(f(x)\right)$, $x>1$.

(i) Halle $f'(x)$.

(ii) Halle $g'(x)$.

(iii) A partir de lo anterior, muestre que $g(x)$ es creciente en $\left]1,\infty\right[$. *[5]*

(b) Considere la ecuación diferencial

$$(\ln x)\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{2x-1}{(\ln x)},\ x>1.$$

(i) Halle la solución general de la ecuación diferencial de la forma $y=h(x)$.

(ii) Muestre que la solución particular que pasa por el punto de coordenadas $\left(e, e^2\right)$ viene dada por $y=\dfrac{x^2-x+e}{(\ln x)^2}$.

(iii) Dibuje aproximadamente el gráfico de dicha solución para $x>1$, indicando claramente todas las asíntotas, los máximos y los mínimos que haya. *[12]*

3. *[Puntuación máxima: 12]*

Cada término de la serie de potencias $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{4\times 5}x+\frac{1}{7\times 8}x^2+\frac{1}{10\times 11}x^3+\dots$ es de la forma $\frac{1}{b(n)\times c(n)}x^n$, donde $b(n)$ y $c(n)$ son funciones lineales de n.

(a) Halle las funciones $b(n)$ y $c(n)$. *[2]*

(b) Halle el radio de convergencia. *[4]*

(c) Halle el intervalo de convergencia. *[6]*

4. *[Puntuación máxima: 15]*

La función f viene dada por $f(x)=\begin{cases} e^{-x^2}\left(-x^3+2x^2+x\right), & x\le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$, donde a y b son constantes.

(a) Halle el valor exacto de a y de b, si f es continua y derivable en $x=1$. *[8]*

(b) (i) Utilice el teorema de Rolle aplicado a f para demostrar que $2x^4-4x^3-5x^2+4x+1=0$ tiene una raíz en el intervalo $]-1, 1[$.

(ii) A partir de lo anterior, demuestre que $2x^4-4x^3-5x^2+4x+1=0$ tiene al menos dos raíces en el intervalo $]-1, 1[$. *[7]*